Índice general

Capítulo I

Conceptos generales

1. Punto

Un elemento definido con coordenadas. Suelen recibir nombres como P o A, y si queremos ser un poco más concretos, nombres más elaborados como P_r.

En el plano tienen dos coordenadas x e y y en el espacio tienen tres x, y y z.

Para asociar las coordenadas al punto se suele escribir cosas como $A(x, y, z)$ o $P(x_2, y_2, z_2)$ y así sabemos que x es la coordenada del punto A pero que x_2 es la coordenada del punto P.

Existe un punto especial llamado **origen** que tiene por coordenadas $(0, 0)$ en el plano y $(0, 0, 0)$ en el espacio.

2. Rectas

Es un conjunto infinito de puntos alineados. Hay varias formas de representarla analíticamente. Es evidente que una recta r puede ser recorrida en los dos sentidos opuestos.

2.1. Ecuación vectorial en el espacio

La forma vectorial de la recta presenta este aspecto

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) \tag{1.1}$$

de es ta forma de la recta conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y su vector director $\vec{U} = (a, b, c)$

2.2. Ecuación paramétrica de la recta en el espacio

Conocemos las coordenadas de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ que pertenece a la recta. El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ indica hacia donde apunta la recta a partir del punto. Su ecuación es de la forma:

$$\begin{cases} x &= x_0 + a\lambda \\ y &= y_0 + b\lambda \\ z &= z_0 + c\lambda \end{cases} \tag{1.2}$$

2.3. Ecuación continua de la recta en el espacio

De esta ecuación de la recta conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y también su vector director $\vec{U} = (a, b, c)$.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{1.3}$$

3. Vector

Es un conjunto de coordenadas que indican una dirección. Cuando escibimos matemáticas solemos ponerle encima un "sombrero"para aclarar que nos referimos a un vector. Por ejemplo el vector U se escribirá como $\vec{U}$.

4. Plano

4.1. Ecuación paramétrica del plano en el espacio

De un plano conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y también dos vectores directores que se encuentran en su interior $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3$ y $\vec{V} = (v_1, v_w, v_3)$

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

4.2. Ecuación general o implícita del plano en el espacio

Los coeficientes A, B y C indican el vector normal $\vec{n}$ del plano.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.5}$$

En este ejemplo nos dan el plano $\pi : 7x + 2y - 3z + 2 = 0$ y de él sacamos la información de sus coeficientes que son $A = 7$, $B = 2$, $C = -3$ y $D = 2$ y por lo tanto el vector normal del plano es $\vec{n} = (7, 2, -3)$.

Capítulo II

Recetas de geometría

Estas recetas pretenden facilitarte las cosas a la hora de entender y aprobar geometría.

1. Punto medio de un segmento

- **Tengo** dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$
- **Obtengo** un punto P_m que se encuentra a medio camino entre A y B

1.- Aplico la fórmula

$$\boxed{P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)} \tag{2.1}$$

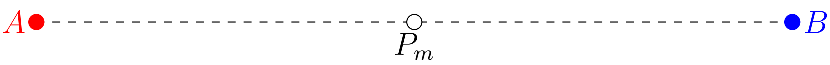

Figura II.1: Punto medio P_m entre los puntos A y B

2. Punto simétrico respecto de un plano

- **Tengo** un punto P y un plano π

- **Obtengo** un punto simétrico P' al otro lado del plano. Algo así como un efecto espejo

1.- Calculo la recta normal r al plano π que pasa por el punto P

2.- Hallo el punto de intersección P_m entre la normal y el plano π

3.- Obtengo el punto simétrico P' mediante la fórmula del punto medio (ver 1). Como conozco las coordenadas de un punto extremo P y también las del punto medio P_m ya solo me queda por obtener el otro extremo P'.

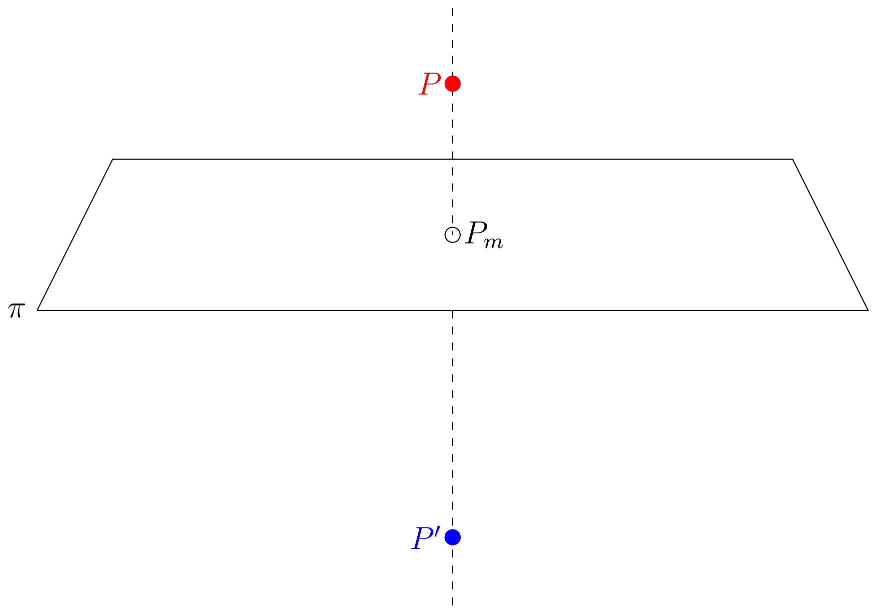

Figura II.2: Punto P' simétrico de P respecto del plano π

Ejemplos (2.4.1) Modelo 2003 Opción A; (2.5.6) Septiembre 2006 Opción A

3. Posición relativa de dos rectas

- **Tengo** dos rectas r y s con sus dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente

- **Obtengo** una descripción de como está posicionada una respecto a la otra

$$\begin{cases} \vec{u} \propto \vec{v} & \begin{cases} \text{Tienen al menos un punto en común} \rightarrow \textbf{Coincidentes} \\ \text{NO tienen punto en común} \rightarrow \textbf{Paralelas} \end{cases} \\ \\ \vec{u} \not\propto \vec{v} & \begin{cases} \text{Tienen un punto en común} \rightarrow \textbf{Se cortan} \\ \text{NO tienen punto en común} \rightarrow \textbf{Se cruzan} \end{cases} \end{cases}$$

1.- Si sus vectores directores apuntan en la misma dirección $\vec{u} \propto \vec{v}$ (proporcionales) averiguar si tienen algún punto en común sustituyendo un punto de la recta r en la recta s

   a) Si el punto pertenece a la recta son coincidentes **coincidentes**

   b) Si no, son rectas **paralelas**

2.- Si apuntan en direcciones diferentes $\vec{u} \not\propto \vec{v}$, averiguar si tienen algún punto en común resolviendo el sistema

   a) Si el sistema es compatible determinado tienen un punto común y son **coincidentes**

   b) Si el sistema es incompatible no tienen punto común y son **paralelas**

4. Distancia entre un punto y una recta

- **Tengo** un punto P y una recta r con su vector director $\vec{u}$
- **Obtengo** un número real que indica la distancia

1.- Calculo el vector punto a punto $\vec{PP}$, que va desde el punto P a un punto cualquiera de la recta r

2.- Uso la fórmula

$$d = \frac{|\vec{PP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \tag{2.2}$$

5. Distancia entre un punto y un plano

- **Tengo** un punto P y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$
- **Obtengo** un número real que indica la distancia

1.- El numerador de la fórmula contiene la ecuación del plano en valor absoluto. El denominador contiene el módulo de la normal al plano

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.3}$$

2.- Sustituyo las variables x, y y z por las coordenadas del punto P

6. Distancia entre dos rectas

- **Tengo** dos rectas r y s
- **Obtengo** un número real que indica la distancia

1.- Obtener un vector de cada recta $\vec{u}$, $\vec{v}$

2.- Obtener un punto de cada recta que llamaremos P_r y P_s y construimos el vector punto a punto $\vec{PP}$

3.- Aplicamos la fórmula. En el numerador se hace el producto mixto, en el denominador el módulo del producto vetorial

$$d_{r,s} = \frac{|[\vec{PP}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \tag{2.4}$$

Nota Si dos rectas se cortan o son coincidentes, su distancia es nula (0)

7. Área del paralelogramo encerrado por dos vectores

- **Tengo** dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- **Obtengo** un número real que indica el área en unidades al cuadrado

1.- Aplico la fórmula del área, que consiste en hacer el producto vectorial y luego su módulo

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{2.5}$$

Nota Si se trata de un triángulo, divido su área a la mitad

8. Construir recta a partir de dos planos

- **Tengo** dos planos π_1 y π_2. Para construir una recta debemos obtener dos cosas: un vector
- **Obtengo** un vector director $\vec{u}$ y un punto P con el que contruir una recta r

1.- Hago el producto vectorial de las normales de cada plano

2.- El resultado será el vector director $\vec{u}$ de la recta que busco

3.- Ahora debemos obtener el punto, para ello doy un valor a una de las incógnitas, por ejemplo $x = 0$ y resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener las otras dos incógnitas. Los tres resultados (x, y, z) son las coordenadas del punto P

4.- Escribirmos la recta en paramétricas con el punto P y su vector director $\vec{u}$

9. Construir plano que contiene recta y punto

- **Tengo** un punto $P(x, y, z)$ y una recta r
- **Obtengo** un plano π en forma general, también conocida como ecuación implícita

1.- Saco el vector director $\vec{U} = (u_x, u_y, u_z)$ de la recta r

2.- Obtengo un punto de la recta al que llamaré P_r

3.- Contruyo el vector punto a punto $\vec{PP} = (PP_x, PP_y, PP_z)$ que va desde el punto P a P_r

4.- Aplico la fórmula que nos da el plano

$$\begin{vmatrix} x - P_x & y - P_y & z - P_z \\ U_x & U_y & U_z \\ PP_x & PP_y & PP_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2.6}$$

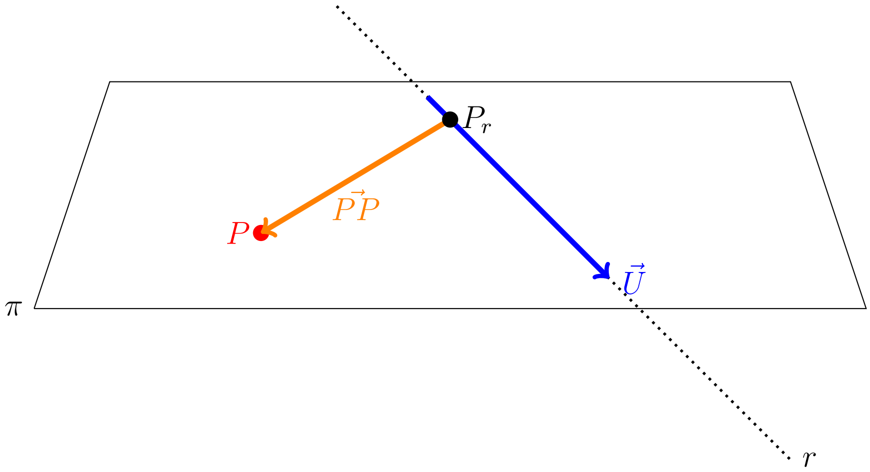

Figura II.3: Plano a partir de una recta contenido en él y un punto P

10. Construir plano a partir de vector perpendicular y punto

- **Tengo** un vector perpendicular $\vec{n} = (A, B, C)$. Este vector será la normal del plano. Tengo también un punto P
- **Obtengo** un plano π

1.- Todos los planos son de la forma $Ax+By+Cz+D=0$. Usaré los coeficientes A, B, C de la normal $\vec{n}$ en la ecuación del plano.

2.- Para averiguar la incógnita D, sustituyo x,y y z del plano por las coordenadas del punto P.

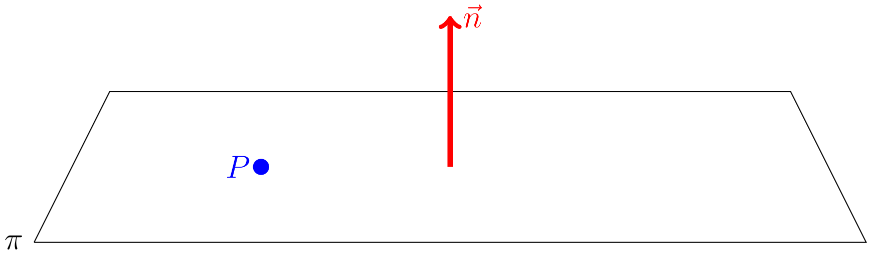

Figura II.4: Plano a partir de un vector perpendicular $\vec{n}$ y un punto P

Ejemplo 10.1

Bibliografía

[Kra+03] M.L. Krasnov y col. *Curso de Matemáticas Superiores*. Vol. 1: *Geometría analítica y álgebra lineal*. 11 vols. 2003. ISBN: 5-354-00454-3.

[Pér+16] José Carlos Gámez Pérez y col. *Matemáticas II. Resuelve*. Santillana, 2016. ISBN: 978-84-680-3322-8.