Espacios vectoriales

Samuel Gómez Fernández

4 de febrero de 2021

Índice general

Capítulo I

Conceptos generales

Sea un conjunto de elementos denominados vectores y otro conjunto de elementos denominados escalares donde los primeros tienen una operación interna y otra externa tal que cumplen

Ley interna $+$ configura la estructura $(V,+)$ como grupo abeliano y por lo tanto cumple las propiedades $AeiC$

Propiedad 1. Asociativa $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V(k) \Rightarrow (\overline{x}+\overline{y})+\overline{z} = \overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$

Propiedad 2. Elemento neutro $\forall \overline{x} \in V(k), \exists \overline{0} \in V(k) / \Rightarrow \overline{x}+\overline{0} = \overline{x}$

Propiedad 3. Simetrizable $\forall \overline{x} \in V(k), \exists (-\overline{x}) \in V(k) \Rightarrow \overline{x}+(-\overline{x}) = \overline{0}$

Propiedad 4. Conmutativa $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V(k) \Rightarrow \overline{x}+\overline{y} = \overline{y}+\overline{x}$

Ley externa $\cdot$ denominada producto por un escalar que asocia a cada vector un escalar de los conjuntos antes mencionados de la siguiente manera $\lambda\overline{x} = \overline{x}\lambda$ y cumple las propiedades. $AeD_v^+D_c^+$

Propiedad 1. Asociativa mixta $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$

Propiedad 2. Elemento neutro Si 1 es el elemento neutro de la ley externa $1{\cdot}\overline{x} = \overline{x}$

Propiedad 3. Distributiva respecto de la suma de vectores $\lambda(\overline{x}+\overline{y}) = \lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$

Propiedad 4. Distributiva respecto de la suma de escalares $(\alpha+\beta)\overline{x} = \alpha\overline{x}+\beta+\overline{x}$

1. Ejemplos de espacios vectoriales

a) Vectores libres tridimensionales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con las operaciones:

Suma Aplicando la regla del paralelogramo $\overline{x}+\overline{y}$.

Producto por un número real El producto de un número real λ por un vector $\overline{x}$ es otro vector $\lambda\overline{x}$, cuyo módulo se obtiene multiplicando por $|\lambda|$ el módulo de $\overline{x}$, su dirección es la de $\overline{x}$, y su sentido coincide con el de $\overline{x}$ cuando λ es positivo, y el contrario cuando es negativo.

b) El conjunto $\mathbb{R}(\mathbb{R})$

Suma Estos vectores unidimensionales son fáciles de operar $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ puesto que solo tienen un componente. Por ejemplo $\overline{3}+\overline{5}=\overline{8}$

c) Producto por un escalar $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. Por ejemplo $3\cdot\overline{5}=\overline{15}$.

2. Propiedades que se deducen de los axiomas

a) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\lambda\overline{0}=\overline{0}$
Demostración $\lambda\overline{x}=\lambda\cdot(\overline{x}+\overline{0})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{0}\Rightarrow\lambda\overline{0}=\overline{0}$

b) $\forall\overline{x}\in V(\mathbb{K}),0\overline{x}=\overline{0}$
Demostración $\overline{x}=\overline{x}(1+0)=\overline{x}+0\overline{x}\Rightarrow 0\overline{x}=\overline{0}$

c) Si $\lambda\overline{x}=\overline{0}\Rightarrow\lambda=0\vee\overline{x}=\overline{0}$
Para su demostración hay dos posibilidades:

Primera posibilidad $\lambda\neq 0\Rightarrow\exists\lambda^{-1}$ porque $\lambda\in\mathbb{K}$ y podemos escribor $\overline{x}=\lambda^{-1}(\lambda\overline{x})$ sustituyendo con el antecedente $\lambda^{-1}\overline{0}\Rightarrow(\lambda^{-1}\lambda)\overline{x}=\overline{0}$ y como lo que está entre paréntesis es 1, nos queda que $1\overline{x}=\overline{0}$, es decir $\overline{x}=\overline{0}$.

Segunda posibilidad $\lambda=0$ ya demostado en $0\overline{x}=\overline{0}$.

Capítulo II

Subespacios vectoriales

1. Propiedades útiles de subespacios vectoriales

Propiedad 1. $\lambda F = F$ Siendo F un subespacio vectorial y λ un escalar perteneciente a un $\mathbb{K}$. La demostración queda expresada en el ejercicio 1.1.

Propiedad 2. $\mathbb{K}(\lambda F) = \mathbb{K}(F)$ Queda demostrado en el ejercicio 1.3

Propiedad 3. $\mathbb{K}\overline{u} \subseteq F \iff \overline{u} \in F$ Demostración en 2

2. Dimensiones

Es el número de vectores de la base. También se corresponde con el el número de parámetros del sistema como por ejemplo en $(x, y, z) = \lambda(2, -1, 0) + \mu(3, 0, -1)$ donde la dimensión sería 2.

3. Suma de subespacios vectoriales

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de E se define $A + B$ como el conjunto formado por la suma de todos los vectores pertenecientes a A con todos los pertenecientes a B, es decir

$$A + B = \{\overline{x} + \overline{y} / \overline{x} \in A, \overline{y} \in B\}$$

Subespacios lineales independientes si todo vector $\overline{v}$ se puede escribir de manera única como $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + ... + \overline{v}_n$ con $\overline{v}_1 \in F_1, \overline{v}_2 \in F_2, ..., \overline{v}_n \in F_n$. O visto del modo de Kostrikin[1], si $\overline{v}_1 \cap \overline{v}_2 \cap ...\overline{v}_n = \emptyset$.

Suma directa Si n subespacios vectoriales son independientes, su suma se llama suma directa y la denotamos como $\oplus$, como por ejemplo $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Espacios vectoriales suplementarios Si dos subespacios vectoriales son independientes y su suma directa es E, es decir $F \oplus G = E$

[1] [Kos83, p60]

Capítulo III

Homomorfismo entre espacios vectoriales

Sean $V(k)$ y $W(k)$ dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo k de operadores, y sea f una aplicación de V en W. Diremos que f es un **homomorfismo o aplicación lineal**, si se cumplen las dos condiciones:

$f(\overline{x}+\overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$

$f(\lambda\overline{x}) = \lambda f(\overline{x})$

1. Imagen de un homomorfismo

Conjunto formado por

$$Im(f) = \{\overline{y} \in W / \exists \overline{x} \in V, \overline{y} = f(\overline{x})\}$$

2. Núcleo de un homomorfismo

Dado un Homomorfismo f de $V(k)$ en $W(k)$, se denomina núcleo al conjunto de todos los vectores de V cuya imagen es el vector nulo de W.

$$N(f) = \{\overline{x} \in V / f(\overline{x}) = \overline{0}_w\}$$

Capítulo IV

Problemas

1. Problemas de espacios vectoriales

Problema 1.1 Sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ dos vectores de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$. Desmostrar la equivalencia

$$(\mathbb{K}\overline{u} = \mathbb{K}\overline{v}) \iff (\exists\lambda \in \mathbb{K}^*, \overline{u} = \lambda\overline{v})$$

[PAA00, 90p140]

Solución Si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son nulos es trivial. Para el resto de casos:

Si $\mathbb{K}\overline{u} = \mathbb{K}\overline{v}$ es $\forall a, b \in \mathbb{K}, a\overline{u} = b\overline{v}$ es decir $\overline{u} = \frac{b}{a}\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

Otra forma de ver esto mismo es $\mathbb{K}\overline{u} = \mathbb{K}\overline{v}$ implica que $\mathbb{K}\overline{u} \subseteq \mathbb{K}\overline{v}$ y por lo tanto $\overline{u} \in \mathbb{K}\overline{u} \subseteq \mathbb{K}\overline{v}$ para dar lugar a $\overline{u} \in \mathbb{K}\overline{v}$ lo cual implica que hay algún valor λ tal que $\overline{u} = \lambda\overline{v}$.

Por otra parte, si $\exists\lambda \in \mathbb{K}^*, \overline{u} = \lambda\overline{v}$ significa que para la segunda parte, si $\overline{u} = \lambda\overline{v} \Rightarrow (\mathbb{K}\overline{u} = \mathbb{K}\overline{v})$ podemos sustituir $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ y obtenemos $\mathbb{K}\overline{u} = \mathbb{K}\lambda\overline{u} = \mathbb{K}(\lambda\overline{u}) = \mathbb{K}\overline{v}$ ■

Problema 1.2 En $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ se considera el sistema de vectores

$$s = \{(17, 8, 9, 12), (0, 0, 1, 5), (0, 2, 1, 1)\}$$

Averiguar si es un sistema libre

[PP96, 3p334]

Solución

$$Rango \begin{pmatrix} 17 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Luego las tres son linealmente independientes y sí es un sistema libre

2. Problemas de subespacios vectoriales

Problema 2.1 Considerése un subespacio vectorial F de un espacio vectorial E, y sea λ un escalar. Designemos por λF el siguiente conjunto:

$$\lambda F = \{\lambda \overline{x} / \overline{x} \in F\}$$

Desmostrar que si λ es no nulo, entonces $\lambda F = F$

[PAA00, 87p139]

Solución Este problema es muy interesante porque permite emplear una herramienta muy potente al igualar los conjuntos $\lambda F = F$ para posteriores ejercicios.

La igualdad implica $\lambda F \subseteq F \wedge F \subseteq \lambda F$. Atacamos el ejercicio por partes.

Parte 1 $\lambda F \subseteq F \Rightarrow \lambda F = \{\lambda \overline{x} / \overline{x} \in F\} \subseteq F$ Como F es un subespacio vectorial cumple siempre $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ por lo tanto, el conjunto λF está incluido en F.

Parte 2 $\forall \overline{x} \in F, \overline{x} = \lambda(\lambda^{-1}\overline{x}) = \lambda \overline{y}$ donde el vector $\overline{y}$ pertenece a F, es decir $\overline{y} \in F$ por lo que $\lambda \overline{y} \in \lambda F$ y como podemos sustituir $\overline{x} = \lambda \overline{y} \in \lambda F$ es decir $F \subseteq \lambda F$ porque $\overline{x}$ representa todos los vectores de F como indicamos al principio del párrafo. ■

Conclusión $\lambda F = F$ está formado por los representantes de clase y λ solo está dando como resultado vectores simplificados o aumentados.

Problema 2.2 Considérese un subespacio vectorial F de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\overline{u}$ un vector de E. Demostrar se verifica:

a) El subespacio vectorial $\mathbb{K}\overline{u}$ está contenido en F si y solo si $\overline{u} \in F$ en símbolos: $\mathbb{K}\overline{u} \subseteq F \iff \overline{u} \in F$

b) Si $\overline{u} \notin F$, entonces $\mathbb{K}\overline{u} \cap F = \{\overline{0}\}$

[PAA00, 92p141]

Solución

a. Si $\mathbb{K}\overline{u} \subseteq F \Rightarrow \overline{u} \in F$ podemos deducir que $1 \cdot \overline{u} = \overline{u} \in F$ que es lo que buscábamos. Por otra parte, para $\overline{u} \in F$ podemos ver que como F es subespacio, por su definición se cumple.

b. Si $\overline{u} \notin F \Rightarrow \mathbb{K}\overline{u} \cap F = \{\overline{0}\}$ supongamos $\overline{u} \notin F$. Entonces, quiera que sea el escalar λ no nulo, se tiene que $\lambda\overline{u} \notin F$, pues en caso contrario, al ser F subespacio vevtorial de E, se deduciría la pertenencia a F del vector $\overline{u} = \lambda^{-1}(\lambda\overline{u})$. En consecuencia, el único vector que pertenece simultaneamente a $\mathbb{K}\overline{u}$ y a F es el $\overline{0}$. **Problema 2.3**

Si $\overline{v}$ es un vector de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y λ es un escalar, demostrar que le conjunto $\lambda\mathbb{K}\overline{v}$ es igual al subespacio vectorial $\mathbb{K}(\lambda\overline{v})$. Si λ es no nulo, deducir la igualdad: $\mathbb{K}(\lambda\overline{v}) = \mathbb{K}\overline{v}$.

[PAA00, 88p139]

Solución

Parte 1 Tenemos $\lambda\mathbb{K}\overline{v} = \{\lambda\overline{x}/\overline{x} \in \mathbb{K}\overline{v}\} = \{\lambda(\mu\overline{v})/\mu \in \mathbb{K}\} = \{\mu(\lambda\overline{v}/\mu \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}(\lambda\overline{v})$ ■

Parte 2 Si $\lambda \neq 0$ podemos emplear lo demostrado en el ejercicio 2.**??** para escribir $\mathbb{K}(\lambda\overline{v}) = \lambda\mathbb{K}\overline{v} = \mathbb{K}\overline{v}$.

Hemos aprovechado que $\mathbb{K}$ cumple la propiedad conmutativa de la segunda ley. **Problema 2.4** En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se considera el subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y + 3z = 0\}$$

a) Demostrar que S es subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) Determinar una base para el subespacio

c) Expresar el vector $\overline{a} = (-21, 3, 5)$ con dicha base

[PP96, 4p335]

Solución

a. Demostrar que S es subespacio Cumple las tres condiciones

b. Determinar una base Tenemos una ecuación implícita para un total de tres componentes, luego necesito dos parámetro, o lo que es lo mismo, una base con dos vectores.

Busco dos vectores linealmente independientes que cumplan le ecuación implícita $\overline{e_1} = (2, -1, 0)$ y $\overline{e_2} = (3, 0, -1)$

c. Expresar el vector $\overline{a} = (-21, 3, 5)$ con dicha base

$$(-21, 3, 5) = a(2, -1, 0) + b(3, 0, -1)$$

$$\begin{cases} -21 & = 2a + 3b \\ \quad 3 & = -a \\ \quad 5 & = -b \end{cases}$$

Obtenemos los valores $a = -3$ y $b = -5$ y por lo tanto $\overline{a} = -3\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$

Problema 2.5 Determinar una base del subespacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ cuyos elementos son la solución de la ecuación $2x - y + z = 0$

[PP96, 5p336]

Solución

Dim espacio vectorial[1] $3 = 1$ ec. implícita $+ 2$ Dim subespacio parámetros[2]

Dos vectores que cumplen la ecuación implícita y que son linealmente independientes para la base son $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, -2)\}$

Problema 2.6 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ se tiene el sistema de vectores $S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0)\}$ y el subespacio $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0\}$

[1]Número de componentes

[2]Número de vectores de la base o número de parámetros

a) Hallar una base para W

b) Ecuaciones paramétricas de $L(S)$

c) Obtener una base de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ completando la base $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,2,1,0)\}$

d) Hallar una base para el subespacio $W \cap L(S)$

[PP96, 6p338]

Solución

a. Hallar una base para W Un subespacio vectorial está sujeto a las restriccione del espacio vectorial al cual pertenece. Los tres vectores de ·S· son linealmente independientes y cumplan la ecuación implícita de W, por lo tanto son la respuesta.

$$\text{Dim espacio vectorial } 4 = 1 \text{ ec. implícita} + 3 \text{ Dim subespacio}$$

b. Ecuaciones paramétricas $(x,y,z,t) = \lambda(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(0,2,1,0)$
Paramétricamente queda

$$\begin{cases} x &= \lambda + \beta \\ y &= \beta + 2\gamma \\ z &= \gamma \\ t &= 0 \end{cases}$$

Solo necesito una única ecuación implícita puesto que tengo ya los tres parámetros que implica que la base tiene tres vectores. Así que me quedo con $t = 0$

c. Obtener una base Para completar en $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ la base $B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,2,1,0)\}$ solo necesito un vector que será $(0,0,0,1)$

d. Una base para el subespacio $W \cap L(S)$ se puede obtener de la interección de las ecuaciones implícitas de W y $L(S)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\text{Dim espacio vectorial } 4 = 2 \text{ ec. implícitas} + 3 \text{ Dim subespacio}$$

Necesito dos vectores linealmente independientes que cumplan las ecuaciones implícitas

$$B(W \cap L(S)) = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

Problema 2.7 En $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ se define el subespacio W por sus ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 - 3x_4 - x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

Determinar su dimensión, unas ecuaciones paramétricas y una base.

[PP96, 8p342]

Solución

Dimensión El subespacio es de dimensión 3

$$\text{Dim espacio vectorial } 5 = 2 \text{ ec. implícitas} + 3 \text{ Dim subespacio}$$

Ecuaciones paramétricas Necesitaremos tres parámetros porque el subespacio es de dimensión 3. Elijo libremente asociar tres incógnitas a tres parámetros, así $x_3 = a$, $x_4 = b$ y $x_5 = c$ quedando

$$\begin{cases} 5x_1 & = -x_3 + 3x_4 + x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 & = 3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{5}(-a + 3b + c) \\ x_2 & = \frac{1}{10}(2a + 9b - 2c) \end{cases}$$

Base Como tengo tres parámetros debo encontrar tres vectores. Voy a activarlos asignando valores 0 y 1 secuencialmente primero para a, luego para b y finalmente para c.

a	**b**	**c**	**vector**
1	0	0	$\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 0, 0\right)$
0	1	0	$\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 0, 1, 0\right)$
0	0	1	$\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 1\right)$

Problema 2.8 En un espacio vectorial $V^3(\mathbb{R})$ se tienen dos bases ligadas por la relación matricial

$$\begin{pmatrix} \overline{e'}_1 \\ \overline{e'}_2 \\ \overline{e'}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix}$$

a) Expresar las coordenadas del vector genérico $\overline{x}$ en la nueva base

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$$

b) Cambiar de base el vector $\overline{a} = 3\overline{e'}_1 - 2\overline{e'}_2 + \overline{e'}_3$

[PP96, 8p345]

Solución

a. Expresar coordenadas en la nueva base Operando puedo entender mejor la información que me están ofreciendo. Me quedo con las igualdades del primer y último miembro de la expresión

$$\begin{pmatrix} \overline{e'}_1 \\ \overline{e'}_2 \\ \overline{e'}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3 \\ \overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3 \\ \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + 4\overline{e}_3 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, puedo decir que

$$\begin{cases} \overline{e'}_1 = (1,3,3) \\ \overline{e'}_2 = (1,4,3) \\ \overline{e'}_3 = (1,3,4) \end{cases}$$

Por otro lado, la inversa de la matriz de cambio es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el cambio para el vector (a,b,c) para obtener un nuevo vector (x,y,z) con el cambio de base se realiza así

$$(x,y,z) = (a,b,c) \cdot A^{-1} = (a,b,c) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) = (7a-b-c, -3a+b, -3a+c)$$

O en paramétricas

$$\begin{cases} x &= 7a-b-c \\ y &= -3a+b \\ z &= -3a+c \end{cases}$$

Que son las coordenadas genéricas del vector $\overline{x} = (a,b,c)$ que me pedían

b. Cambiar de base el vector Cambiaré de base a $\overline{a} = 3\overline{e'}_1 - 2\overline{e'}_2 + \overline{e'}_3$ pero cuidado que en este enunciado no me piden que emplee la fórmula del cambio obtenido en el anterior apartado. Resolveré sustituyendo $\overline{e'}_i$

$$\overline{a} = 3\overline{e'}_1 - 2\overline{e'}_2 + \overline{e'}_3 = 3(1,3,3) - 2(1,4,3) + (1,3,4) = (2,4,7)$$

Este es el vector cambiado de base.

3. Problemas de homomorfismos

Problema 3.1 Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_1 + x_2)$ referida a la base canónica. Se pide:

a) Demostrar que f es un homomorfismo

b) Matriz del homomorfismo

c) Ecuaciones y dimensiones de $N(f)$

d) Ecuaciones y dimensiones de $Im(f)$

[PP96, 10p346]

Solución

a. Demostrar que es un homomorfismo Debe cumplir las dos propiedade

I. Imagen de la suma Debe cumplir $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + y_1, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\ &= (x_1, 0, x_1 + x_2) + (y_1, 0, y_1 + y_2) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

II. Imagen del producto por un escalar Debe cumplir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\begin{aligned} f[\lambda(x_1, x_2, x_3)] &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1, 0, \lambda x_1 + \lambda x_2) \\ &= \lambda(x_1, 0, x_1 + x_2) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Luego f es un homomorfismo.

b. Matriz del homomorfismo Es la que permite transformar un vector del conjunto origen en uno del conjunto imagen. En este caso, la aplicación indica que el vector $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, 0, x_1 + x_2)$. Esto se consigue con la siguiente igualdad

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_1, 0, x_1 + x_2)$$

Luego la matriz del homomorfismo o de transformación es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Ecuaciones y dimensiones del núcleo del homomorfismo También indicado con $N(f)$, es la matriz que nos da el vector nulo

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

Se consigue desarrollando el producto de matrices e igualando

$$(x_1, 0, x_1 + x_2) = (0, 0, 0)$$

Haciendo corresponder componente a componente obtengo las ecuaciones implícitas del núcleo

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$$

Tengo dos ecuaciones implícitas en un espacio vectorial de dimensión 3. Este valor 3 es la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen.

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{R}^3) &= dim[N(f)] + dim[Im(f)] \quad \text{sustituyendo} \\ 3 &= dim[N(f)] + 2 \end{aligned}$$

Donde el primer miembro es la dimensión del conjunto origen y $dim[Im(f)] = Rango(T) = 2$. Por lo tanto la dimensión del núcleo del homomorfismo es 1 y el conjunto buscado es $N(f) = \{(0, 0, \lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ y su base está formada por un único vector $B_N = \{(0, 0, 1)\}$.

d. Ecuación y dimensiones de $Im(f)$ Podemos ver que la expresión $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_1 + x_2)$ implica que

$$\begin{cases} y_1 = x_1 & \text{paramétrica} \\ y_2 = 0 & \text{implícita} \\ y_3 = x_1 + x_2 & \text{paramétrica} \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de $Im(f)$, siendo $y_2 = 0$ su única ecuación implícita. En cuanto a su dimensión, tal y como hemos visto en el anterior, tenemos que $dim[Im(f)] = Rango(T) = 2$.

$$Im(f) = \{(\alpha, 0, \beta)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Y su base tendría dos vectores que son dos vectores libres de T tal como $B_I = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ que permiten obtener todos los resultados posibles del vector (y_1, y_2, y_3) mediante combinación lineal.

Problema 3.2 En $V^3(\mathbb{R})$ se tiene la base $B_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ y en $V^2(\mathbb{R})$ la base $B_2 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$. Se define la aplicación lineal:

$$\begin{cases} f(\overline{e}_1) = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \\ f(\overline{e}_2) = \overline{u}_1 - \overline{u}_2 \\ f(\overline{e}_3) = 2\overline{u}_1 \end{cases}$$

Se pide

a) Expresión matricial del homomorfismo

b) Ecuación y dimensiones de $N(f)$ y de $Im(f)$

c) Estudiar de que tipo es la aplicación lineal dada

[PP96, 11p347]

Solución

a. Expresión matricial del homomorfismo Es la matriz de transformación. Lo obtenemos a partir del vector del conjunto origen $(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$ y su transformación:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= f(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) \\ &= f(x_1\overline{e}_1)_+ f(x_2\overline{e}_2) + f(x_3\overline{e}_3) \\ &= x_1 f(\overline{e}_1)_+ x_2 f(\overline{e}_2) + x_3 f(\overline{e}_3) \qquad \textit{sustituyo } f(\overline{e}_i) \\ &= x_1(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) + x_2(\overline{u}_1 - \overline{u}_2) + x_3(2\overline{u}_1) \end{aligned}$$

Agrupo por los vectores de la base imagen $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$

$$(y_1,y_2) = \overline{u}_1(x_1 + x_2 + 2x_3) + \overline{u}_2(x_1 - x_2) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Así que las ecuaciones implícitas del nucleo son

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Y la matriz que buscamos viene dada por

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2) = (y_1,y_2)$$

La respuesta es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Ecuación y dimensiones de $N(f)$ y de $Im(f)$ El núcleo del homomorfismo se obtiene de

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

Que da lugar a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x_2 \text{ como parámetro}} \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -x_2 = -\lambda \\ x_1 = x_2 = \lambda \end{cases}$$

Obtenemos $N(f) = \{(\lambda,\lambda,-\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$, y la base de dicho núcleo esta formado por un único vector $B_N = \{(1,1,-1)\}$ quedando así claro que será de dimensión 1. Vamos a comprobarlo

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{R}^3) &= dim[N(f)] + dim[Im(f)] \quad \text{sustituyendo} \\ 3 &= dim[N(f)] + 2 \end{aligned}$$

Donde el primer miembro es la dimensión del conjunto origen y $dim[Im(f)] = Rango(T) = 2$, con lo cual tenemos $dim[N(f)] = 1$.

Ecuaciones de $Im(f)$ Su dimensión y la del espacio vectorial que lo contiene, $\mathbb{R}^2$, son iguales, con lo cual, no está sujeto a ninguna ecuación implícita.

c. Tipo de aplicación lineal La aplicación es un homomorfismo de $V^3(\mathbb{R}^3)$ sobre $V^2(\mathbb{R})$, es decir, se trata de un epimorfismo.

Problema 3.3 Mediante la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se establece un homomorfismo entre $V^4(\mathbb{R})$ y $W^3(\mathbb{R}^3)$. La matriz T está referida a las bases $B_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ y $B_2 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$.

Se pide

a) Ecuación matricial del homomorfismo

b) Bases y dimensiones de $N(f)$ y de $Im(f)$

c) Naturaleza del homomorfismo

[PP96, 12p349]

Solución

a. Ecuación matricial Es simplemente

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = x_2 + x_4 \end{cases}$$

b. Bases y dimensiones del núcleo y la imagen Para el núcleo igualamos $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$ en la expresión del apartado anterior.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

Desarrollamos el producto de matrices y como tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones trataremos x_4 como si fuese un parámetro y obtenemos

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x_4=\lambda} \begin{cases} x_1 = x_2 = x_4 = -\lambda \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Entonces el núcleo es $N(f) = \{(\lambda, \lambda, 0, \lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ y su base tiene un único vector $B_N = \{(1, 1, 0, 1)\}$. Su dimensión es 1.

En cuanto a su imagen tendrá dimensión 3 puesto que $Rango(T) = dim[Im(f)] = 3$. Queda confirmado por el hecho de que

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{R}^3) &= dim[N(f)] + dim[Im(f)] \quad \text{sustituyendo} \\ 4 &= 1 + dim[Im(f)] \end{aligned}$$

Así pues, debemos buscar los tres vectores que formen la base de $Im(f)$ para poder formar todos los vectores (y_1, y_2, y_3) mediante combinación lineal. Los hallaremos entre los vectores de la matriz de transformación T que sean independientes, por ejemplo, los tres primeros.

$$B_I = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

c. Naturaleza del homomorfismo Se trata de un epimorfismo, es decir, un homorfismo de $V^4(\mathbb{R})$ sobre $W^3(\mathbb{R})$, ya que la dimensión del subespacio $Im(f)$ coincide con la del espacio de llegada $W^3(\mathbb{R})$.

Problema 3.4 Sea $\overline{w}$ un vector de un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar la siguiente equivalencia:

$$\mathbb{K}\overline{w} = \{0\} \iff \overline{w} = \overline{0}$$

[PAA00, 89p139]

Solución Ambos conjunto son iguales. Sabemos que para el primer conjunto se cumple $1 \cdot \overline{w} \in \mathbb{K}\overline{w} = \{\overline{0}\}$ luego $1\overline{w} = \overline{0}$ esto solo ocurrirá cuando $\overline{w} = \overline{0}$.

Por otra parte si $\overline{w} = \overline{0} \Rightarrow \mathbb{K}\overline{w} = \{\overline{0}\}$ sustituyendo tenemos $\mathbb{K} \cdot \overline{0} = \{\lambda \cdot \overline{0}/\lambda \in \mathbb{K}\} = \{\overline{0}\}$ ■

Bibliografía

[Kos83] A. I. Kostrikin. *Introducción al álgebra*. Editorial MIR, 1983. ISBN: no.

[PP96] Concha Palacios y Carlos Pagliarani. *Álgebra. Teoría y ejercicios*. Editorial Ciencia 3, 1996. ISBN: 84-86204-75-5.

[PAA00] Emilio Prieto Sáez, Alberto A.Álvarez López y María Ángeles Arándiga Raez. *Álgebra lineal. Problemas resueltos y cuestiones comentadas*. Editorial Universitaria Ramón Areces, 2000. ISBN: 978-84-8004-437-0.